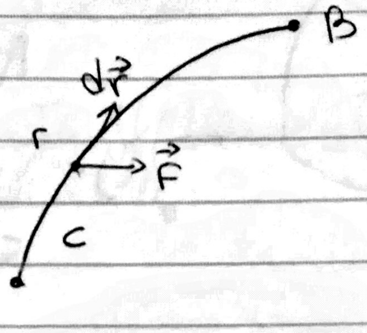
20/05/2019

Μάθημα 18ο

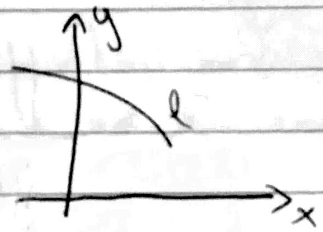
⊛ Όταν λέμε ότι έχουμε ομογενές σύστημα σημαίνει ότι έχω σταθερή πυκνότητα.

Παρατήρηση: Σε περίπτωση που έχουμε "μονοδιάστατα" σώματα, π.χ. ελατήρια, ράβδους κλπ, τότε τα ολοκληρώματα ανάγονται σε επικαμπύλια.

• $W = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$



$M = \oint_l x \rho \, dl$



① Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε την $l = l(x,y)$

② Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε όλες τις παραμέτρους x, y, l μονοπαραμετρικά ως συνάρτηση του l.

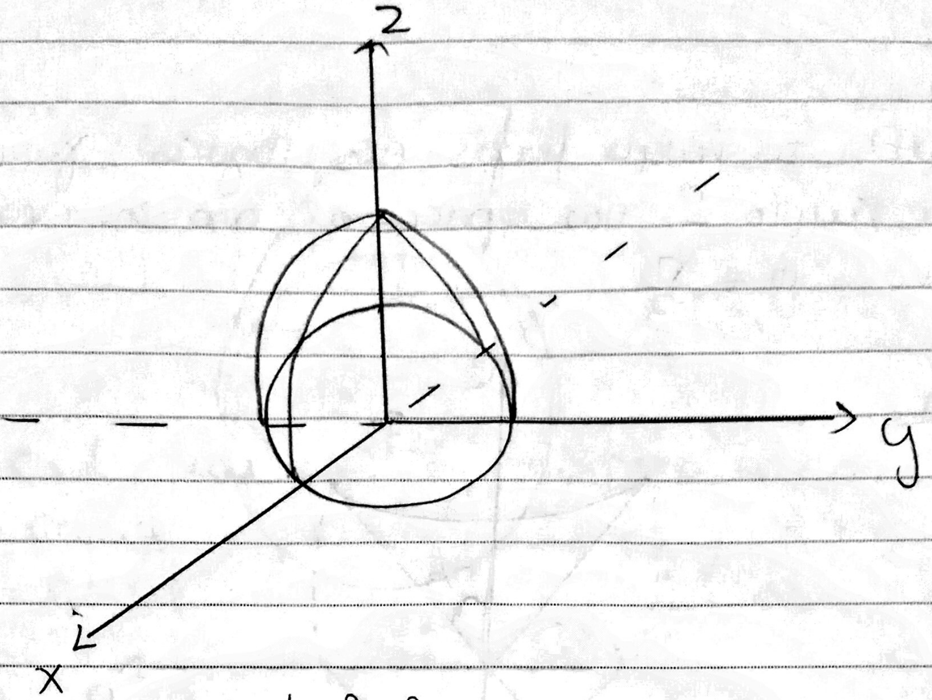
Παράδειγμα

ΚΜ; στερεό σώμα πυκνότητας $\rho = σταθ$ που φράσσεται από τον κυκλικό δίσκο $\{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$ και το παραβολοειδές $z = 4 - x^2 - y^2$

Απάντηση

Υπάρχει συμμετρία στο σχήμα: $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$

(πως θα το δείξω; → με τα αντίστοιχα ολοκληρώματα όπως ξέρουμε)



$$W = \iiint_\Omega \rho \, dV = \rho \iint_R \int_0^{4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \rho \iint_R (4-x^2-y^2)\,dy\,dx =$$

$$= \rho \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(4-r^2)\,dr\,d\theta = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r-r^3)\,dr\,d\theta =$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r-r^3)\,dr = 2\pi\rho\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= 2\pi\rho(8-4) = 4\cdot 2\pi\rho = 8\pi\rho$$

$$M_{xy} = \iiint_\Omega \rho z \, dV = \rho \iint_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-x^2-y^2} dy\,dx = \frac{\rho}{2}\iint_R (4-x^2-y^2)^2\,dy\,dx =$$

$$= \dots = \frac{32}{3}\pi\rho$$

Άρα: $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{32\pi\rho/3}{8\pi\rho} = \frac{32\pi\rho}{3\cdot 8\pi\rho} = \frac{4}{3}$

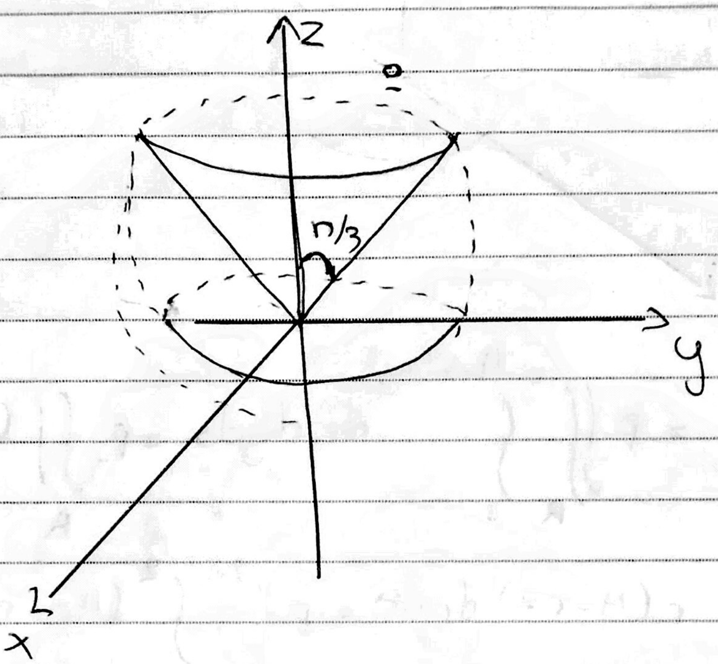
Τότε: $\bar{r}_s = (0, 0, 4/3)$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός παγωτού χωνάκι

Έστω το χωρίο $\underline{\Omega}$ που φράσσεται από την σφαίρα, $r \leq 1$ και κώνο $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Απάντηση.



$$M = \iiint_{\underline{\Omega}} \rho \, dV = \rho \iiint_{\underline{\Omega}} dV$$

Εργάζομαι σε σφαιρικές συντεταγμένες και έτσι έχω

$$m = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \ldots = \frac{\pi \rho}{3}$$

$M_{yz} \overset{?}{=} 0$, $M_{xz} \overset{?}{=} 0$, $M_{xy} \neq 0$.

$$M_{yz} = \iiint_{\underline{\Omega}} x \rho \, dV = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 (r \sin\varphi \cos\theta) \, r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \ldots = 0.$$

$M_{xz} = 0$ όμοια με M_{yz} λόγω συμμετρίας.

$$M_{xy} = \iiint_{\underline{\Omega}} z \rho \, dV = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r \cos\varphi \, r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \ldots = \frac{\pi \rho}{4} \neq 0.$$

Άρα ΚΜ: $\bar{r}_s = (0, 0, 3/4)$

Παρατήρηση: Αν εργαζόμασταν με καρτεσιανές τότε:

$$m = \iiint_{\Omega} dV = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{3/4-x^2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

Έχουμε $r=1$ και $\varphi = \pi/3$, τότε από πολικές έχουμε:

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $r = \sqrt{3}/2$, άρα $\begin{cases} x = \sqrt{3}/2 \cos\varphi \\ y = \sqrt{3}/2 \sin\varphi \end{cases}$

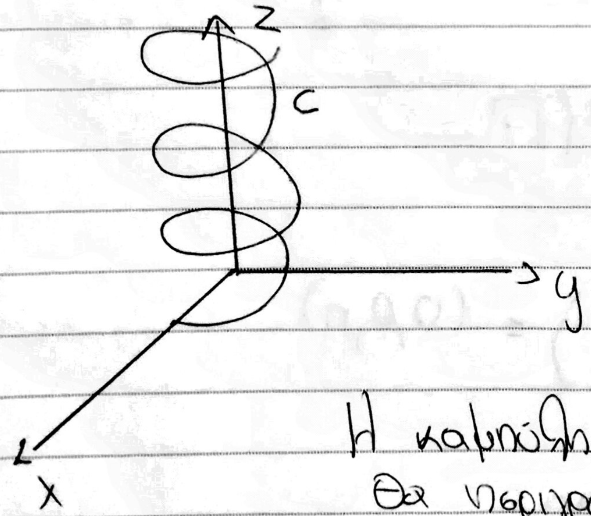
Άρα $x^2+y^2 = 3/4$

Κώνος: $z^2 = \frac{1}{3}(x^2+y^2)$

γενικά: $\frac{z^2}{\alpha^2} = \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\gamma^2}$

Παράδειγμα

Έστω το ελατήριο που περιγράφεται από την ελικοειδή καμπύλη



Περιγράψτε την καμπύλη C

Η καμπύλη αυτή είναι παραμετρική και θα περιγράφεται από μία παράμετρο

Το διάνυσμα θέσης είναι:

$\bar{r}(t) = \cos(4t)\bar{i} + \sin(4r)\bar{j} + t\bar{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

Αν $\rho = 1$ (Kg/m2) να βρεθεί το ΚΜ, ροπή αδράνειας στον z-άξονα

Υπόθεση ΚΜ: $\bar{r}_s = (0,0,\pi)$

$$m = \oint_c \rho(x,y,z)\, dc = \rho \int_c ds = \rho \int_c |\vec{v}| \cdot dt =$$

$$= \rho \int_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \int_c \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 1}\, dt =$$

$$= \int_c \sqrt{16+1}\, dt = \sqrt{17} \int_c dt = \sqrt{17} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{17} =$$

$$= 2\sqrt{17}\pi \Rightarrow m = 2\pi\sqrt{17}\ kg$$

$$M_{yz} = \int_c x\rho\, ds = \int_0^{2\pi} \cos(4t)\sqrt{17}\, dt = 0$$

Όμοια, $M_{xy} = 0$ λόγω συμμετρίας

$$M_{xy} = \int_c z\, ds = \int_0^{2\pi} t \cdot |\vec{v}|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\, t\, dt =$$

$$= \sqrt{17} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{17}$$

$$\bar{r}_s = \left(0, 0, \frac{2\pi^2\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}\right) = (0,0,\pi)$$

Ροπή Αδράνειας: z-άξονα:

$$I_z = \oint_c (x^2+y^2)\rho\, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2(4t) + \sin^2(4t))\sqrt{17}\, dt =$$

$$= 2\pi\sqrt{17}$$

Ακτίνα αδράνειας z-άξονα: $R_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = 1.$